Compressione omologica di curve

Una linea curva, ad esempio la sinusoide, può essere resa più elegante, al fine del design, applicandole un effetto prospettico. Per ottenere questo risultato si può sfruttare l'omologia.

Invece di utilizzare la prospettiva lineare, si può ricorrere alla compressione dello spazio tramite arcotangente. Questo tipo di deformazione è descritta nel mio libro:
La prospettiva e la costruzione dello spazio figurativo.
Alla pagina 282 leggiamo la formula di compressione:

xx=rl/90*atn(2*x/rl)

Il valore rl è la distanza limite, il punto unito è in x=xx=rl/2, il fuoco in x=xx=0.

Questa formula può essere applicata in diversi modi, se per x intendiamo la componente radiale delle coordinate sferiche, avremo una prospettiva solida sferica.
Oppure possiamo comprimere soltanto l'asse x, come se si trattasse di prospettiva lineare.
In questo caso il punto oggetto P=(x,y), posto sul piano z=0, dovrà spostarsi in P'=(xx,yy) lungo il raggio uscente da O.
Dunque dovrà risultare: xx/x=yy/y.

L'espressione y può essere intesa come una funzione cartesiana in x: y=y(x), che consideriamo definita in (0,l), dove l sia la distanza del punto unito, dunque rl=2*l. Supponiamo pure che y(0)=0, ovvero che la curva esca dall'origine.

Otteniamo dunque la formula:
xx=2*l/90*atn(x/l)
yy=y*xx/x per x non nullo, altrimenti yy=0

Per il caso sghembo si dovrà introdurre la terza coordinata:
zz=z*xx/x per x non nullo, altrimenti zz=0

Esempi

1) Sinusoide sul piano xy: 2D

```
f=      !frequenza
am=   !ampiezza
n=      !risoluzione curva

for i=0 to n
t=i/n
x=l*t
xx=2*l/90*atn(t)
y=am*sin(180*t*f)
if abs(x)>0 then yy=y*xx/x else yy=0
put xx,yy
```

```
next i
```

2) Elica cilindrica uscente da O, con asse in direzione x: 3D

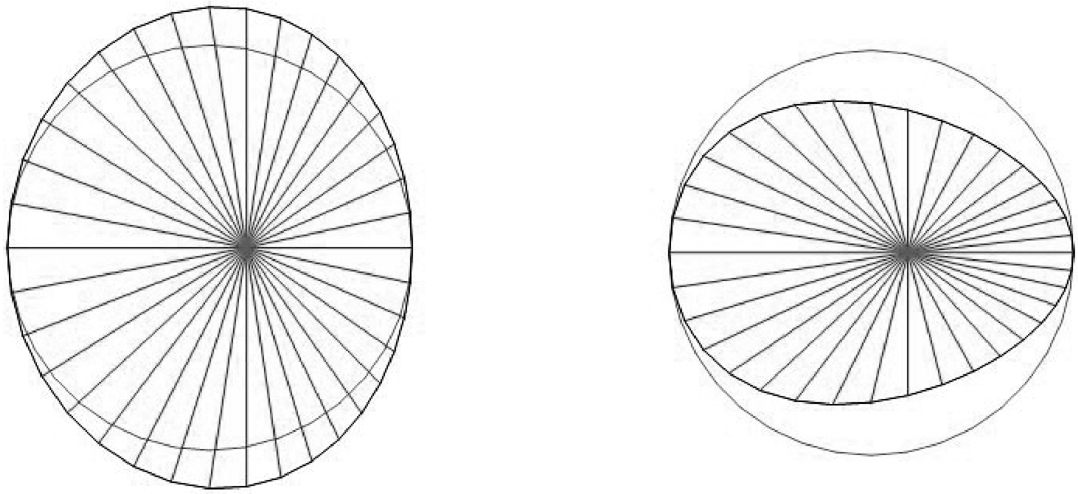
```
f=    !numero spire
r=   !raggio cilindro
n=    !risoluzione curva

BASE
for i=0 to n
t=i/n
x=l*t
xx=2*l/90*atn(t)
y=r*cos(360*t*f)-r
z=r*sin(360*t*f)
if abs(x)>0 then yy=y*xx/x else yy=0
if abs(x)>0 then zz=z*xx/x else zz=0
VERT xx,yy,zz
next i

for i=1 to n
EDGE i, i+ 1,-1,-1,0
next i
```

Un modo alternativo consiste nell'imporre la convergenza alla fuga PF, invece della convergenza dei raggi al fuoco PV, secondo le regole della costruzione lineare.

Risulterà allora:
yy/y=(rl-xx)/rl
ovvero:
yy=y*(2*l-xx)/(2*l)

In questa variante il punto iniziale, per x=0, può anche avere ordinata non nulla, mentre nel caso precedente occorreva o calcolare un limite per x tendente a 0, ovvero far partire la curva da O. In questo caso, però, il punto finale deve cadere sull’asse x.

Questa variante comprime la curva in senso trasversale rispetto l'asse x, mentre la variante precedente la dilata.



In figura trasformazione prospettica con arcotangente applicando i due diversi metodi: a destra si mantiene l'allineamento dei raggi visuali, a sinistra la convergenza al punto di fuga. In luogo dell'ellisse si ricavano ovoidi.

Volendo invece utilizzare la contrazione prospettica lineare od omologia, si può applicare la formula:

xx=dl*(x+ d)/(x+ dl)-d
yy=y*(xx+ d)/(x+ d)
zz=z*(xx+ d)/(x+ d)

In questo caso il punto di vista cade sull'asse x negativa a distanza d.

Il quadro improprio o piano limite è situato a distanza dl dal punto di vista, con equazione x=dl-d.

Il quadro,ovvero luogo dei punti uniti, coincide con il piano coordinato yz.

Con questa trasformazione la curva, uscente da qualsiasi punto del quadro nella direzione x+, verrà comunque contratta. Per portarla alla lunghezza l originale si dovrà applicare un allungamento dello spazio lungo l'asse x del valore l/ll dove ll=dl*(l+ d)/(l+ dl)-d

Rispetto alla contrazione con arcotangente, oltre a dover definire 2 parametri, d e dl, occorre dunque applicare un comando tipo MUL, che rende l'operazione più laboriosa. Inoltre mentre il punto iniziale può trovarsi in qualsiasi posizione sul quadro, quello finale per x=l deve giacere sull'asse x, altrimenti la curva immagine termina in un punto distinto dalla curva oggetto.

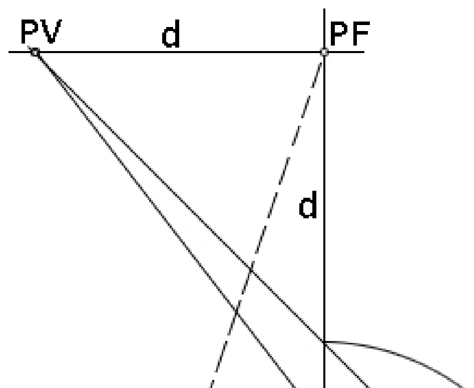
Dato che il risultato finale è sempre una proiezione, si può elaborare una formula unica.

Per ricavarla, invece di ragionare in termini di omologia 3D, consideriamo una proiezione prospettica a distanza d che trasformi un segmento ortogonale al quadro ad esso tangente in un segmento di eguale lunghezza. Il raggio che ne intercetta l'estremità avrà inclinazione di 45°.

Risulta:

xx/x=(d+ l-xx)/d

ed ancora:



yy/y=(d+ l-xx)/(d+ l)

Da cui ricaviamo la formula per la curva definita
in x appartenente a (0,l). Il punto finale della
curva, per x=l, rimane invariato soltanto se
appartiene all'asse x.

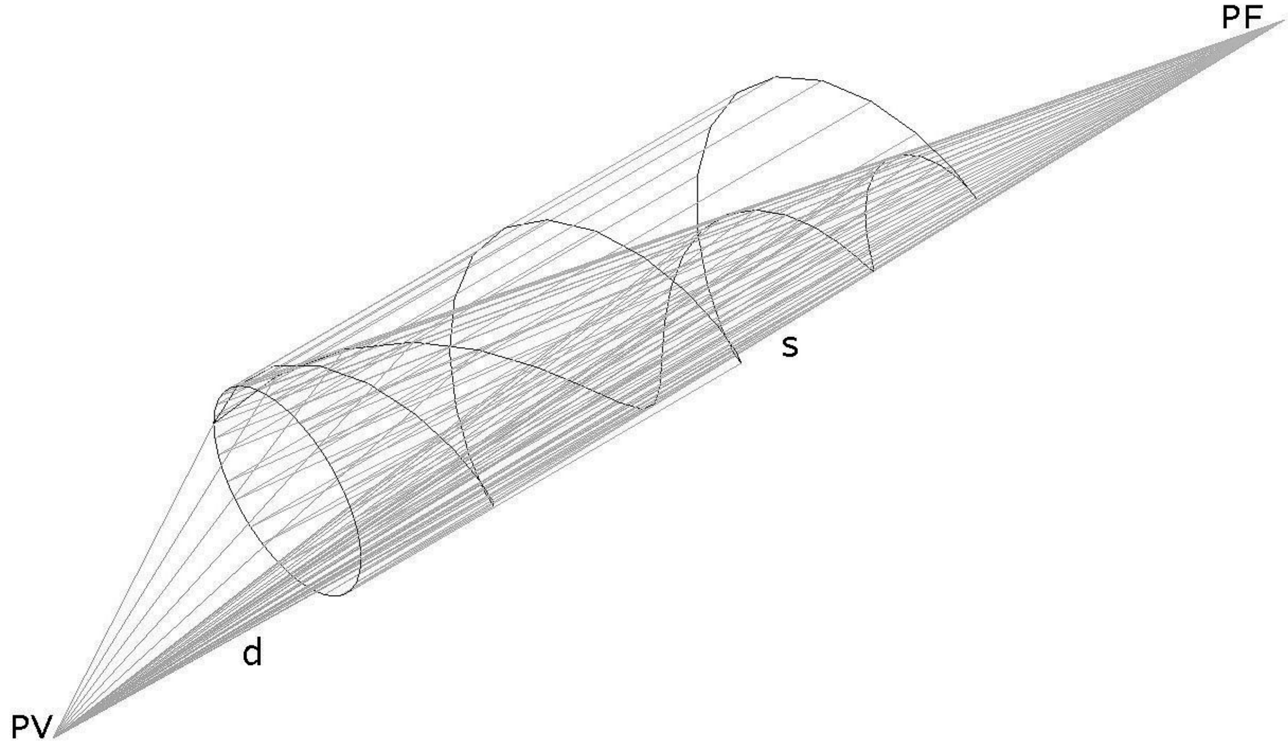
```
xx=(d+ l)*x/(d+ x)
yy=(d+ l-xx)*y/(d+ l)
zz=(d+ l-xx)*z/(d+ l)
```

Se vogliamo utilizzare la profondità di scena s in luogo della distanza dal quadro d , risulta d+ l=s , pertanto si ricava la formula:

```
xx=s*x/(s-l+ x)
yy=(s-xx)*y/s
zz=(s-xx)*z/s
```

Esempio: elica cilindrica uscente da O, con asse in direzione x.

```
f=    !numero semi-spire
r=    !raggio cilindro
n=    !risoluzione curva
s=    !ascissa punto di fuga

BASE
for i=0 to n
t=i/n
x=l*t
y=r*cos(180*t*f)+ r
z=r*sin(180*t*f)
xx=s*x/(s-l+ x)
yy=(s-xx)*y/s
zz=(s-xx)*z/s
VERT xx,yy,zz
next i

for i=1 to n
EDGE i, i+ 1,-1,-1,0
next i
```


PF
s
d
PV